Suites et nombres complexes

EXERCICE N°1 : 3 points 10 '

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par :$u_0 = 1; v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)v_n$ et $v_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha v_n$ où est un réel donné tel que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

1. Soit (t_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = v_n - u_n$.
   (a) Calculer t_0 et t_1 .
   (b) Montrer que,pour tout entier naturel n,$t_n = (2\alpha - 1)^n$.
   (c) En déduire la limite de t_n.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n,$u_n \leqslant v_n$
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
   (c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite ℓ .
   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n,$u_n + v_n = 3$ et en déduire la valeur de la limite ℓ.

EXERCICE N°2 : 3 points 10 '

On considère les suites u_n et v_n définies sur $\mathbb{N}$, par : $\begin{cases} u_0 = 0, & u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \\ v_0 = 1, & v_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases}$

1. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n)sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite.
3. Soit la suite(t_n) définie, pour tout entier naturel n, par :$t_n = 9u_n + 5v_n$
   (a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
   (b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n) .

EXERCICE N°3 : 4 points 15 '

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 2(1+i)z - 1 + 2i = 0$

2°) On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E_\theta): z^2 - 2\left(i + e^{i\theta}\right)z - 1 + 2ie^{i\theta} = 0$ avec $\theta \in IR$.

Vérifier que i est une solution de l'équation (E_θ) et en déduire l'autre solution.

3°) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+4i)z + 1 - 2i$.

: 23390248 - 29862267

Tous droits réservés © TakiAcademy.com

a) Vérifier que l'équation $P(z)=0$ admet une solution réelle que l'on précisera.

b) Déterminer deux nombre complexes b et c tels que $P(z)=(z-1)(z^2+bz+c)$.

c) En déduire les solutions de l'équation : $P(z)=0$.

4°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

On donne le point M d'affixe $i+2e^{i\theta}$ avec $\theta\in]-\pi,\pi]$.

a) Vérifier que pour $\theta=0$, ABM est un triangle rectangle isocèle en A.

b) Montrer que lorsque θ varie, le point M varie sur un cercle $\mathscr{C}$ qu'on précisera le centre et le rayon.

c) Montrer que $OM^2=5+4\sin\theta$.

d) En déduire la valeur de θ, pour laquelle la distance OM est maximale.

EXERCICE N°4 : 3 points 15 '

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$.

1. (a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes a et b.
   (b) Vérifier que $b^2=a$.
2. Soit C le point d'affixe $c=a+b$.
   (a) Placer les points A, B et C.
   (b) Vérifier que $c=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
3. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) ; $z^2+z-c=0$.
   (a) Vérifier que b est une solution de l'équation (E).
   (b) On désigne par d la deuxième solution de l'équation (E). Montrer que $d=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i(\frac{-11\pi}{12})}$
   (c) Placer alors le point D d'affixe d.

: 23390248 - 29862815
Tous droits réservés © TakiAcademy.com